

Le schématisme transcendantal dans l'arithmétique : la lecture richirienne de Frege

Masumi Nagasaka
Waseda University

Abstract

Transcendental Schematism in Arithmetic: On Richir's Reading of Frege

This article shows how the contemporary phenomenologist Marc Richir developed his reflection on the foundation of arithmetic. Despite Frege's criticism of the Kantian thesis of arithmetic, Richir discovers, in his reading of Frege's logicist foundation for arithmetic, a key to rediscovering the Kantian conception of the number as a transcendental schema of quantity (*quantitas*). We begin this presentation by considering the background of the problem through examining the Kantian and Husserlian notions of the number. At the same time, we show the fundamental difference between Husserl's and Richir's phenomenologies by referring to the problem of the intuition of the infinite. Secondly, we show the key points of Richir's reading of Frege's work, *The Foundation of Arithmetic* (1884), which are developed in Richir's article 'Heredity and Numbers' (1983). The impossibility of the intuition of the infinite, which is, for Frege, one of the examples that attest to the impossibility of founding the number's existence on intuition, proves, for Richir, the impossibility of the thoroughgoing determination of the elements of an infinite set. Departing from this premise, Richir discovers, between the lines of Frege, an undeclared phenomenological foundation of arithmetic.

Keywords: thoroughgoing determination, the transcendental ideal, transcendental schema, zero, the infinite

La phénoménologie est étroitement liée à la considération du fondement de l'arithmétique depuis sa naissance. Dans cet article, nous montrerons comment Marc Richir, un phénoménologue francophone contemporain, prend

* Cette recherche a été financée par JSPS KAKENHI (Grant Number JP18K12187).

en considération la fondation phénoménologique de l'arithmétique. Il reprend dans son travail le concept kantien du nombre comme schème transcendantal de la quantité (*quantitas*¹). Bien que cette conception ait été l'objet de la critique émise par Frege, Richir dégage, dans sa lecture de la tentative fregéenne de fonder logiquement l'arithmétique, une clé pour redécouvrir la fondation kantienne de l'arithmétique.

Notre démonstration sera menée en deux étapes. Premièrement, nous reviendrons sur l'arrière-plan de notre problématique en présentant la notion de nombre chez Kant et chez Husserl respectivement. Nous démontrerons également la différence entre la phénoménologie de Husserl et celle de Richir en prenant comme points de repère la problématique de l'intuition de l'infini et celle de la détermination complète (*durchgängige Bestimmung*) des éléments de l'ensemble infini. Deuxièmement, après avoir démontré ces points, nous présenterons les points clés de la lecture richirienne de l'œuvre de Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik* (Frege 1884), déployée dans son article « L'Hérédité et les nombres » (Richir 1983).

L'impossibilité de l'intuition de l'infini est, chez Frege, l'un des exemples qui attestent de l'impossibilité de fonder l'existence des nombres à partir de l'intuition. Néanmoins, chez Richir, cette même impossibilité va de pair avec celle de la détermination complète des éléments de l'ensemble infini. En partant de cette prémisse différente de celle de Frege, Richir dégage d'entre les mots de Frege une fondation phénoménologique inavouée.

1. L'arrière-plan : le nombre comme schème transcendantal de la quantité

L'une des révolutions qu'introduit Kant dans sa philosophie transcendantale consiste à considérer la proposition arithmétique comme jugement synthétique *a priori*, écartant à la fois la psychologie empirique qui l'expliquerait comme jugement synthétique *a posteriori*, et la logique formelle qui la tiendrait pour jugement analytique *a priori*. Ces deux extrêmes mis à l'écart ne peuvent pas donner une explication suffisante pour la fondation de l'arithmétique : la première (la psychologie empirique) n'arrivant pas à expliquer l'universalité de

l'arithmétique, la deuxième (la logique formelle) ne réussissant pas à expliquer l'élargissement de la connaissance ayant lieu dans le jugement arithmétique.

Afin de montrer comment la proposition arithmétique s'établit comme jugement synthétique *a priori*, Kant a recours à son schématisme transcendantal. Néanmoins, le chapitre du schématisme transcendantal dans la *Critique de la raison pure* n'a pas été facilement accepté par ses lecteurs de l'époque ultérieure : Mill propose de retourner à la psychologie empirique, d'une part, et Frege soutient qu'il faut retourner à la logique formelle, d'autre part. L'une des raisons de ces deux sortes de retour consisterait en le fait que le schématisme transcendantal que développe Kant reste obscur à leurs yeux.

Nous commencerons donc par démontrer en quoi consiste le schème transcendantal de la quantité. Le schème, un produit de l'imagination, est l'une des conditions de possibilité de la connaissance, qui permet à la fois « de rendre sensibles ses concepts » et « de se rendre intelligibles ses intuitions » (Kant 2006, 144 ; Kant 1911, 1904/1911, A51/B75) et ainsi applique les concepts aux intuitions. Dans le cas du nombre, celui-ci permet d'appliquer les concepts de la quantité (*quantitas*) à une forme de l'intuition qui est le temps (Kant 2006, 227 ; Kant 1911, 1904/1911, A142-143/B182 ; Kant 1911, *Prolog.* 283). Le nombre joue le rôle d'intermédiaire entre les catégories de la quantité et le temps.

Que ce schème soit « transcendantal » signifie qu'il est lié aux concepts purs de l'entendement. Le schématisme transcendantal est la fonction de médiatiser les catégories et les phénomènes (Kant 2006, 224 ; Kant 1911, 1904/1911, A138/B177). Les catégories de la quantité – l'unité, la pluralité et la totalité – ne sont que les cadres vides de la pensée, elles ne peuvent en tant que tels être appliquées aux phénomènes sans intervention du schématisme transcendantal qui les rend sensibles (Kant 2006, 228-229 ; Kant 1911, 1904/1911, A145/B184).

Kant présente le schématisme transcendantal de la quantité comme une « série du temps » (*Zeitreihe*). L'unité, la pluralité et la totalité ne deviennent sensibles que si elles sont liées à une forme de l'intuition qu'est le temps, à travers la

suite du temps. L'acte de compter est donc l'acte de produire le temps comme une suite du temps.

Néanmoins, cette description du schématisme transcendantal par Kant n'était pas suffisamment claire pour de nombreux héritiers de sa philosophie. Tout en donnant son consentement à la thèse kantienne selon laquelle la proposition de la géométrie est un jugement synthétique *a priori*, Frege refuse d'accepter une thèse parallèle selon laquelle la proposition arithmétique l'est aussi. Le logiciste critique non seulement le psychologisme, mais aussi le schématisme kantien qui tente de surmonter l'empirisme, en argumentant qu'il est incompréhensible sans impliquer l'aspect empirique (Frege 1969, 129 ; Frege 1884, 6, §5).

Dans cette critique du psychologisme empirique, Frege dénonce trois apories qu'il attribue à l'argument psychologue du fondement de l'arithmétique selon lequel le nombre naît de l'abstraction psychique des objets intuitionnés.

La première aporie consiste en l'incompatibilité de la différence (*Verschiedenheit*) et de l'identité (*Gleichheit*). D'une part, une simple accumulation d'objets différents ne donne pas un nombre. L'acte de compter suppose que chaque objet compté apparaisse comme identique. D'autre part, une accumulation de choses identiques ne donne pas non plus un nombre. S'il y a trois monnaies et si elles sont identiques – à savoir, si elles ont les mêmes propriétés et occupent un temps et un espace identiques –, nous les comptons comme 1 et non 3. C'est un non-sens de compter ceux qui sont identiques.

La deuxième aporie est celle de zéro et de 1. Zéro et 1 ne sont pas la pluralité. Si l'on fait abstraction de la lune, on pourrait en tirer « satellite de la Terre » ou « satellite d'une planète », mais pas le nombre 1. Dans le cas de zéro, il n'y a même pas de quoi extraire une abstraction.

La troisième aporie est celle des grands nombres ou de l'infini. Nous pourrions avoir l'intuition des trois chaises, mais il nous serait impossible d'avoir l'intuition de 50 chaises. S'il y avait des chaises de nombre infini, il est évident que cela dépasserait notre capacité d'intuition sensible. Frege considère que ces trois apories peuvent être balayées par la position logiciste. Néanmoins, en intervenant dans cette polémique

philosophique autour du fondement de l'arithmétique, Husserl critique dans la *Philosophie de l'arithmétique* (Husserl 1891) à la fois Kant, Mill et Frege. Selon notre interprétation pourtant, la thèse que soutient Husserl hérite d'une manière essentielle de celle de Kant en ce qu'elle considère comme deux écueils le psychologisme (de Mill) et le logicisme (de Frege). Nous l'expliquerons.

Husserl critique Kant qui lie le nombre au temps, de même qu'il critique Lange qui l'associe à l'espace (Lange 1894, 138 *et seq.*). Selon Husserl, si le nombre était quelque chose de fondé sur le temps ou sur l'espace, l'ordre temporel ou spatial exercerait son influence sur la constitution du nombre. Néanmoins, ce qui est trois est toujours trois, que l'on compte de gauche à droite, de droite à gauche, du temps précédent au temps ultérieur ou du temps ultérieur à temps précédent. Cela attesterait de l'indépendance du nombre, du temps et de l'espace (Husserl 1970, 31 *et seq.*, 36 *et seq.*).

Tout en ayant ainsi critiqué la thèse kantienne selon laquelle le nombre est la « série du temps », Husserl hérite, selon notre interprétation, de l'enseignement essentiel de Kant selon lequel les propositions arithmétiques sont des jugements synthétiques *a priori*. Cela est perceptible lorsque Husserl définit l'acte de compter comme l'acte de lier quelque chose (*Etwas*) à quelque chose (*Etwas*) : comme une liaison collective (*kollektive Verbindung*). Le nombre est constitué par cette liaison par « et » (*und*), sans que cette liaison ne dépende du contenu des « quelque choses » (Husserl 1970, 79 ; Derrida 1990, 65, n. 26). Dans cette conception husserlienne, l'aporie première que Frege met en lumière ne pose pas de problème. L'acte de la pensée de lier les termes constitue un nombre indifféremment de si ceux-ci sont identiques ou différents au niveau de leurs contenus.

Husserl donne également la solution à la deuxième aporie de Frege (l'aporie de zéro et de 1) ainsi qu'à la troisième (l'aporie des nombres grands et de l'infini), en introduisant la distinction entre les nombres propres (*eigentliche Zahl*) et symboliques ou celle des nombres fondés sur l'acte de penser et ceux qui en sont déduits ultérieurement (Husserl 1970, 133 *et seq.*).

De là, bien que Husserl finisse *La philosophie de l'arithmétique* en un seul tome, sans y ajouter la publication du

deuxième tome qu'il avait préparé, nous pouvons y découvrir une esquisse de la fondation phénoménologique de l'arithmétique. Il s'agit du changement de l'intérêt qui s'est orienté aux contenus des objets comptés, vers l'intérêt à « et » que l'acte de penser attribue en liant les objets. Nous pouvons considérer – bien que Husserl ne le précise pas ainsi – que c'est une fonction de l'imagination qui entrevoit derrière des objets comptés un « quelque chose » absolument formel et eidétique.

Ainsi, Husserl semble nous annoncer la notion ultérieure de variation imaginative qui lui permettra de développer la notion de l'intuition eidétique. Ce « quelque chose », quoique Husserl n'emprunte pas ce terme, n'est autre qu'une sorte de schème transcendantal, produit de l'imagination apriorique, sans que ce schème ne soit lié au temps.

Néanmoins, après la critique de Frege émise dans sa recension de la *Philosophie de l'arithmétique*, Husserl n'a laissé aucune œuvre ultérieure concernant la fondation de l'arithmétique, du moins sous forme d'œuvres publiées. D'où surgit la question : comment la phénoménologie peut-elle répondre, après Husserl, à la tentative logiciste de Frege ? C'est afin de répondre à cette question que nous nous dirigeons vers Richir. N'oublions pas cependant que Richir n'est pas un héritier soi-disant orthodoxe de Husserl. Tout en estimant très hautement Husserl, Richir considère que la phénoménologie de ce dernier commet l'erreur de tomber dans l'apparence transcendantale prévenue par Kant dans sa *Dialectique transcendantale* (Richir 2004). Comme c'est les cas d'Aristote et de Kant, Richir considère que l'intuition de l'infini actuel est impossible.

Nous l'expliquons. Dans le chapitre de « L'idéal transcendantal » dans la *Dialectique transcendantale*, Kant traite de la problématique de l'apparence transcendantale de la connaissance de l'infini, en rappelant le principe de « *omnimoda determinatio* » chez Leibniz (2002, 18-21). Il s'agit du principe selon lequel « *toute chose existante est intégralement déterminée* (alles Existierende ist durchgängig bestimmt) » (Kant 2006, 518 ; Kant 1911, 1904/1911, A573/B601).

Kant évoque ce principe comme un indice qui permet de distinguer la détermination logique d'un concept et la détermination ontologique d'une chose. Pour qu'un concept soit

possible, il suffit qu'il ne contienne pas de contradiction. Pourtant, pour qu'une chose existe, non seulement il est nécessaire qu'elle ne contienne pas de contradiction, mais aussi qu'elle soit soumise au principe de la détermination intégrale (Kant 2006, 518 ; Kant 1911, 1904/1911, A571/B599). Qu'une chose existe implique donc que tous ses attributs et leurs degrés sont intégralement déterminés.

Ce qui fonctionne comme mesure de cette détermination n'est autre que l'idéal transcendantal, *Urwesen* (archi-essence) qui contient en soi le degré parfait de tous les attributs possibles dans la simplicité, car sans cette mesure qui concrétise la perfection, il serait impossible de déterminer les attributs ou les degrés d'une chose. Kant dit : « Tout comme l'idée fournit la règle, l'idéal sert [...] de prototype pour la détermination complète de la copie » (Kant 2006, 517 ; Kant 1911, 1904/1911, A569/B597). En d'autres termes, l'idéal sert de « mesure indispensable » « pour pouvoir apprécier et mesurer d'après lui le degré et le défaut de ce qui est imparfait » (ibid.). Ainsi, Kant montre que l'idéal transcendantal n'est autre que la présupposition transcendantale de la détermination intégrale d'une chose. Il est donc pensable mais non intuitionnable. La raison humaine ne peut donc pas affirmer qu'il existe.

L'impossibilité de l'intuition de l'infini actuel rend en même temps impossible, pour Richir, la détermination complète des éléments de l'ensemble infini. C'est une différence essentielle à l'égard de Husserl qui reconnaît l'intuition de l'infini actuel, bien qu'il s'agisse de l'intuition catégoriale distinguée de l'intuition sensible. Ainsi avons-nous confirmé l'arrière-plan de notre problématique.

2. La lecture richirienne de la tentative fregéenne de fondement de l'arithmétique

Après avoir parcouru cet arrière-plan, nous voudrions dès à présent monter comment Richir lit Frege et quelles conséquences il en tire. Pour commencer, il nous faudrait prêter encore une fois attention au fait que Richir et Frege partagent la même prémisse selon laquelle l'intuition de l'infini est impossible (la troisième aporie indiquée ci-dessus). Néanmoins, à partir de cette même prémisse, les deux philosophes se

dissocient pour s'opposer l'un à l'autre : Frege en conclut la thèse selon laquelle le nombre existe sans s'appuyer sur aucune intuition. Contrairement à Richir qui conçoit que l'impossibilité de l'intuition de l'infini est inséparable de l'impossibilité de la détermination complète des éléments de l'ensemble infini, Frege soutient l'impossibilité de l'intuition de l'infini et *en même temps* la possibilité de la détermination complète des éléments de l'ensemble infini. C'est ce point qui devient problématique dans la lecture richirienne de Frege.² Nous suivrons donc l'article « L'Hérédité et les nombres » dans lequel Richir examine la tentative fregéenne de fondement logiciste du nombre déployée dans *Les fondements de l'arithmétique*.

i. La détermination complète des éléments de l'ensemble infini présupposé dans la tentative logiciste fregéenne de fonder l'arithmétique

Afin de montrer que le nombre existe indépendamment de l'intuition et que la proposition de l'arithmétique se justifie sans être fondée sur la connaissance de la subjectivité, Frege aborde une considération hautement innovatrice du nombre : l'extension du concept.

Ordinairement, nous avons tendance à penser qu'il faut d'abord définir ce qu'est le nombre afin de comprendre ce que signifie le fait que deux nombres soient égaux. Frege prend la voie inverse : c'est en partant de la définition du fait que deux nombres soient égaux que l'on peut obtenir la définition du nombre ou, plus exactement, en partant de la définition du fait que deux concepts sont équinumériques que l'on peut définir le nombre : « ce concept [le concept de nombre cardinal] doit recevoir sa détermination de notre définition de l'identité de deux nombres » (Frege 1969, 189 ; Frege 1884, 74, §63). Cette définition est donnée ainsi : « [...] je dirai que le concept *F* est équinumérique au concept *G* si nous sommes en possession d'une telle correspondance [correspondance biunivoque] » (Frege 1969, 194 ; Frege 1884, 79, §68). « Je définis donc : le nombre qui appartient au concept *F* est l'extension du concept : "équinumérique au concept *F*" » (Frege 1969, 194 ; Frege 1884, 79-80, §68).

En suivant cette présentation de Frege, Richir considère comme problématique le fait que Frege présuppose comme si nous connaissions en quoi consiste l'extension du concept.

La difficulté est qu'il faut présupposer les extensions de concepts, c'est-à-dire ce fait que les classes d'objets subsumés par F ou G soient toujours déjà constituées comme classes d'individus toujours déjà déterminés – comme si les concepts permettaient d'effectuer des découpages déterminés dans un domaine toujours déjà constitué d'individus [...]. (Richir 1983, 82)

Ici, il met le doigt sur le fait que Frege présuppose la possibilité de la détermination complète des éléments qui appartiennent à l'extension du concept. Cette présupposition peut être justifiée si l'extension forme un ensemble fini, mais elle peut ne pas se justifier s'il s'agit d'un ensemble infini. Comme nous avons vu plus haut, la présupposition de la détermination complète implique la présupposition de l'idéal transcendantal qui est une apparence transcendantale. Selon Richir, ceci provoque des paradoxes dont l'un est le paradoxe de Russell.

Reprenons le texte de Frege. Après avoir défini le nombre comme extension du concept, Frege définit le concept de relation. Dans une phrase, nous pouvons dissocier les concepts, d'une part, et les complémentaires des concepts, à savoir les relations qui lient les concepts, d'autre part (Frege 1969, 196 ; Frege 1884, 82, §70). Frege explique que celles-ci appartiennent à « la logique pure », puisqu'elles sont totalement indépendantes de l'intuition (Frege 1969, 196 ; Frege 1884, 83, §70). Il peut ainsi formuler, en utilisant ce « concept de relation », comme suit :

[L]'expression : « le concept F est équinumérique au concept G » a [la] même signification que l'expression : « il existe une relation Φ qui associe biunivoquement les objets qui tombent sous le concept F et les objets qui tombent sous le concept G ». (Frege 1969, 198 ; Frege 1884, 85, §72)

Après avoir ainsi exposé les conceptions basiques, Frege aborde ensuite la définition du zéro qui est, elle aussi, totalement indépendante de l'intuition : « Puisque rien ne tombe sous le concept : “non identique à soi-même”, je pose par définition : 0 est le nombre cardinal qui appartient au concept “non identique à soi-même” » (Frege 1969, 200 ; Frege 1884, 87, §74). Quel que soit l'objet dont il s'agit, il est évident, par le

principe de non-contradiction, qu'il est impossible qu'il soit non-identique à soi-même. Ainsi, il n'y a aucun objet qui appartienne à ce concept.

Richir discerne dans cette définition de zéro un certain passage : dès que l'on définit comme zéro le nombre qui revient au concept « non-identique à soi », on pose l'extension de ce concept comme l'ensemble vide. L'ensemble vide est ainsi posé :

Cette non-identité à soi caractérisant le vide ou le Rien est elle-même identifiée à soi comme le Rien ou le vide d'une extension dont le concept est le nombre zéro en tant que concept découpant, dans le domaine de tous les concepts possibles, les concepts dont l'extension est vide - par où le nombre zéro devient lui-même un individu identique à soi. (Richir 1983, 87)

Nous confirmons ici que Richir saisit l'individuation du nombre zéro comme identification du soi (au niveau de l'ensemble) à travers sa non-identité à soi (au niveau du contenu qui appartient à cet ensemble). Dès que l'on définit comme « zéro » le nombre qui revient au concept « non-identique à soi », ce « zéro » s'individualise comme « zéro » (identique à lui-même).

Après avoir défini le zéro, Frege aborde la définition de la succession immédiate dans la suite naturelle des nombres.

« [I]l existe un concept F et un objet x qui tombe sous ce concept tels que le nombre cardinal qui appartient à ce concept est n et que le nombre cardinal qui appartient au concept "qui tombe sous F mais n'est pas identique à x est m ". » veut dire la même chose que « n suit immédiatement m dans la suite naturelle des nombres. ». (Frege 1969, 202 ; Frege 1884, 89, §76)

Si nous pensons le cas où le concept F est « identique à 0 », le concept « appartenant à F mais non identique à x » est « identique à 0 mais non identique à 0 ». Comme il n'y a pas d'objet qui tombe sous ce concept, le nombre qui revient à ce concept est zéro. Ainsi, $m = 0$. Or, il n'y a qu'un seul objet qui tombe sous un concept « identique à 0 » : il s'agit du nombre « zéro ». Donc, en définissant comme 1 ce concept « identique à 0 », nous obtenons la conséquence selon laquelle 1 suit immédiatement à zéro (Frege 1969, 203 ; Frege 1884, 90, §77).

Richir fait la remarque suivante concernant le concept F indiqué dans le paragraphe 76 :

[...] la définition proposée par Frege [de la succession immédiate] fait intervenir autre chose que le jugement de reconnaissance par identification, à savoir la non-identité de x à l'égard de tous les autres objets tombant sous F (ou la non-identité à x de tous les autres objets). (Richir 1983, 89)

Poser le concept « appartenant à F mais non identique à x » présuppose déjà la possibilité de distinguer x de tous les autres objets appartenant à F . Cette non-identité en question, c'est-à-dire la non-identité d'un objet à un autre objet, présuppose de surcroît le fait que x est identique à soi-même et que les objets autres que x sont identiques à eux-mêmes en leur part, donc en somme leur individuation. Ainsi, dit Richir, « ce qui sous-entend à son tour que *tous* les objets tombant sous F soient préalablement reconnaissables, distinguables, à savoir individués » (Richir 1983, 88).

En mettant ainsi en relief cette présupposition fregéenne, Richir attire l'attention sur le mouvement analogue que nous avons confirmé au moment de l'identification du nombre zéro : « Il y a donc dans le concept de successivité le jeu d'une différence entre identités ou individus » (Richir 1983, 89). Le mot « jeu » désigne ici le mouvement de l'identification des objets appartenant à F mais non identiques à x comme tels. Ces objets, à leur tour, sont pris comme ceux qui tombent sous le concept F auquel le nombre m revient. « C'est donc bien à partir de F et de x (et donc de n) qu'on peut réfléchir le concept auquel revient le nombre m (précédant immédiatement n), et par là, identifier le nombre m comme précédant immédiatement le nombre n » (Richir 1983, 90).

Ainsi, selon Richir, Frege présuppose le fait que tous les objets tombant sous le concept F sont complètement déterminés et distingués clairement les uns des autres. D'où surgit le problème suggéré : il est légitime de présupposer ceci lorsqu'il s'agit du concept contenant des objets finis, mais illégitime lorsqu'il s'agit du concept contenant des objets infinis.

Revenons sur le texte de Frege. Après avoir défini la succession immédiate, Frege fait encore un pas en avant pour définir ce qu'il avait décrit en empruntant la notion d'« hérédité » dans *Begriffsschrift* (1879) (Frege 1993, 61). Ici, il désigne par « la φ -suite » la suite des termes liés avec le concept de relation φ .

La proposition : « Si tout objet avec lequel x a la relation φ tombe sous le concept F et si, quand d tombe sous le concept F , il suit que, quel que soit d , tout objet avec lequel d a la relation φ tombe sous le concept F , alors y tombe sous le concept F , quel que soit le concept F » veut dire la même chose que « y succède à x dans la φ -suite » et que « x précède y dans la φ -suite » ». (Frege 1969, 204-205 ; Frege 1884, 92, §79)

En suivant cette définition où la relation φ est définie comme relation héréditaire, Richir remarque ainsi : « définir l'ensemble ou la classe des d revient à définir la succession φ héréditaire et réciproquement ; ou mieux encore la définition de l'un ne va pas sans la définition de l'autre [...] » (Richir 1983, 103). Ce qui pose un problème aux yeux de Richir est que l'ensemble des d est défini en s'appuyant sur la succession φ , et que la définition de la succession φ s'appuie sur la détermination complète de l'ensemble des d . Si l'ensemble des d est l'ensemble fini, il n'y a pas de problème. Mais l'attention de Richir porte sur le fait que Frege emprunte les expressions « quel que soit d » et « quel que soit le concept F ». Ainsi, remarque Richir :

[...] l'on fait *comme si*, par la quantification universelle sur l'objet d ainsi que par la quantification universelle sur le concept F , on disposait d'avance de la totalité déterminée de la suite φ , alors qu'en réalité, nous le savons, nous n'en disposons jamais, si du moins la suite est infinie, comme c'est le cas pour la suite N . (Richir 1983, 104).

Le problème se pose, pour Richir, dans la mesure où cette quantification universelle ne pose aucune limite à la validité de la définition. Comme nous l'avons confirmé, l'idéal transcendantal dépassant notre limite de la connaissance, il est impossible de poser préalablement la possibilité de l'individuation intégrale de l'ensemble des d . Ainsi dit-il : « On procède donc comme si, dans le cas de la suite N , on connaissait d'avance toutes les propriétés des nombres – ce qui est impossible [...] » (Richir 1983, 104). Pour Richir, Frege présuppose la connaissance de l'idéal transcendantal. En ce sens, la définition fregeenne de la suite de l'hérédité présuppose l'inconnaissable.

ii. Le schématisme transcendantal dans la définition fregéenne de la suite naturelle des nombres

Revenons sur le texte de Frege. Après avoir ainsi défini la suite héréditaire, Frege aborde, dans le paragraphe 82, la définition de la suite naturelle des nombres qui commence par zéro et qui continue sans se terminer. Pour cela, il commence par prouver que la suite naturelle des nombres n'a pas de fin : « Il faut maintenant montrer que – sous une condition qui reste à donner – le nombre qui appartient au concept : “appartenant à la suite naturelle des nombres qui se termine par n ” suit immédiatement n dans la suite naturelle des nombres ». Si l'on peut prouver que le nombre appartenant au concept « appartenant à $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ » suit immédiatement n , l'on peut dire qu'à tout n il y a un nombre qui suit immédiatement dans la suite naturelle des nombres, et donc qu'il y n'a pas de fin dans cette suite (dans la discussion qui suit, pour la commodité, nous désignerons le concept « appartenant à la suite naturelle des nombres qui se termine par n » comme $\{0, 1, \dots, n\}$, ou bien, à l'instar de Richir, tout simplement comme H_n).

Comme Frege n'esquisse qu'un plan général de cette preuve, nous l'aborderons en la suivant pas à pas. La preuve se divise en trois étapes :

Prémisse 1 : a suit immédiatement d .

Prémisse 2 : le nombre qui revient au concept « appartenant à $\{0, 1, \dots, d\}$ » (H_d) suit immédiatement d .

Conséquence : le nombre qui revient au concept « appartenant à $\{0, 1, \dots, a\}$ » (H_a) suit immédiatement a .

1) est affirmée lorsque $d = 0$, $a = 1$.

La conséquence de (1) est affirmée pour tous les nombres n .

D'abord, il y a une correspondance biunivoque entre le concept « appartenant à $\{0, 1, \dots, d, a\}$ mais non identique à a » et le concept « appartenant à $\{0, 1, \dots, d\}$ » (H_d), donc ces deux concepts sont équinumériques. Frege précise ici qu'on présuppose préalablement comme suit : « [...] aucun objet appartenant à la suite naturelle des nombres commençant par 0 ne peut se succéder à lui-même dans la suite naturelle des nombres » (Frege 1969, 207 ; Frege 1884, 95, §83), à savoir que $d \neq a$. Par la prémisse 2, le nombre qui revient au concept H_d

suit immédiatement à d . Par la prémisse 1, ce nombre qui revient au concept H_d est identique à a . Ainsi, le nombre qui revient au concept « appartenant à $\{0, 1, \dots, d, a\}$ mais non identique à a » (que nous désignons dorénavant à l'instar de Richir comme H_a -a) est aussi a .

Par la définition de la suite immédiate dans le paragraphe 76, le nombre qui revient au concept F « appartenant à H_a » suit immédiatement le concept « appartenant à F mais non identique à a ». Or, comme le nombre qui revient au concept « appartenant à F mais non identique à a » est a , le nombre qui suit immédiatement a est le nombre qui revient au concept F « appartenant à H_a ». Ainsi, l'étape (1) est prouvée.

Puis, lorsque $d = 0$, $a = 1$, le nombre qui revient au concept « appartenant à H_0 », à savoir 1, suit immédiatement 0. Ainsi, par (1), le nombre qui revient au concept « appartenant à (H_1) » suit immédiatement 1. Ainsi est prouvée l'étape (2).

Nous définissons ce nombre qui revient au concept H_1 comme 2. Il s'ensuit que le nombre qui revient au concept H_2 suit immédiatement 2. Définissons comme 3 le nombre qui revient au concept H_2 , et nous obtenons le fait que le nombre qui revient au concept H_3 suit immédiatement 3, et ainsi de suite. En général, le nombre qui revient au concept H_n suit immédiatement n . Ainsi l'étape (3) est prouvée.

En attirant notre attention sur l'esquisse donnée par Frege de cette preuve, Richir remarque que le nombre qui revient au concept H_n est individué à travers la répétition de l'individuation des nombres qui commence par la fixation du zéro :

[...] c'est seulement la fixation du 0 comme origine ou premier élément de la suite qui permet d'associer univoquement la propriété F héréditaire [...] à tout nombre de la suite. [...] un nombre n ne peut être individué que par rapport à l'individuation du 0 [...]. (Richir 1983, 117).

C'est donc comme si le nombre qui revenait au concept H_n jouait le rôle de « mémoire » (Richir 1983, 118) de l'accumulation des termes de la suite des nombres commençant par zéro et se terminant avec n . Mais cette accumulation de proche en proche des termes individuéés en succession est

possible seulement lorsque l'on présuppose que « la suite soit toujours déjà constituée d'individus distincts » (Richir 1983, 119 et seq.), présupposition que Richir ne partage pas avec Frege.

L'attention de Richir est donc portée sur a dans le paragraphe 82 :

[...] a ne s'individue comme nombre qu'à partir du moment où il est envisagé comme lieu de réflexion permettant d'excepter a de la section considérée de la suite et de réfléchir H_{a-a} en l'extension ou le cardinal a . (Richir 1983, 122 et seq.)

Il considère donc qu'un acte de réflexion est en œuvre dans la fixation du nombre cardinal de H_{a-a} , à savoir a . Richir y voit de surcroît ce qu'il qualifie de « clignotement » : un passage de la non-identité à soi vers l'identité à soi : « Donc a en tant que phénomène individué se phénoménalise comme lieu de clignotement entre son identité à soi [...] et sa non-identité à soi [...] » (Richir 1983, 124).

Cette affirmation de Richir, difficile à suivre à première vue, devient compréhensible par un changement de point de vue : prendre a comme chaque terme qui suit immédiatement à soi-même (a précédant qui est pris dans la succession actuelle comme d). Nous saisissons ici le clignotement de a comme un mouvement. Pourquoi est-ce un « clignotement » ? Puisque ce mouvement constitue l'identification de a qui se distingue du a précédant (donc d actuel), à savoir l'identification du soi qui s'identifie comme ce qui se distingue de soi-même (comme nous l'avons confirmé plus haut, Frege pose comme condition préalable que a soit différent de d).

Dans la même phrase citée ci-dessus, Richir précise que, dans son identité à soi, a « disparaît comme phénomène et apparaît comme imminence du concept », et que, dans son non-identité à soi, a « apparaît en tant que phénomène distinct de son concept mais disparaît du même coup comme phénomène individué » (Richir 1983, 124). Le a qui « disparaît » est le a précédant, à savoir le d actuel, il est déterminé et déjà enregistré dans la suite des termes dans le passé, le a qui « apparaît » est le a qui arrive, il est encore un phénomène qui se distingue du a précédant déterminé et qui sera soumis au concept.

C'est dans ce clignotement que Richir voit le « schématisme transcendantal » en œuvre : il s'agit d'une rencontre entre le penser et le phénomène dans le a que Richir qualifie de « maillon de la chaîne » :

[...] en lui [le maillon de la chaîne], [...] pris en tant que maillon relativement indéterminé comme cela se passe dans l'individuation du phénomène a , se rencontrent le penser en tant que le réfléchissant ou le mouvement même de réflexion et la pensée en tant que le phénomène a individué mais non encore assigné comme nombre cardinal de la section H_a - a . (Richir 1983, 129*et seq.*)

Il s'agit de la rencontre du « penser » et de la « pensée », de l'acte de penser et du phénomène pensé, le lieu du schématisme transcendantal kantien : « [...] le nombre devient, comme pour Kant, schème transcendantal de la quantité : [...] » (Richir 1983, 132).

Richir qualifie ce schème de « rythme de la répétition » (Richir 1983, 136). En tant que ce rythme même, le nombre est défini, individualisé à partir du zéro et en établissant le rapport de l'hérédité entre zéro et 1, ensuite 1 et 2, et ainsi de suite, comme on noue un maillon de chaîne l'un à l'autre, et cette individuation de a n'a pas de fin. Frege construit donc un nombre en concevant par l'acte de penser le phénomène a . Le nombre ne peut pas être construit sans cette rencontre du penser et la pensée, sans l'acte de la connaissance.

Richir discerne dans ce mouvement non seulement la temporalisation transcendantale, mais aussi l'espacement transcendantal : « Et c'est par ce pur mouvement qui donne à la répétition répétée son statut de phénoménalité, [...] que se constitue par conséquent l'espacement et la temporalisation transcendantale [...] » (Richir 1983, 134*sq.*). Il annonce donc bien la thèse kantienne selon laquelle l'acte de compter est la production du temps :

[...] [le nombre] est une représentation qui embrasse l'addition successive de l'unité à l'unité (homogène). Donc, le nombre n'est autre que l'unité de la synthèse du divers compris dans une intuition homogène en général, rendu possible par le fait que je produis le temps lui-même dans l'appréhension de l'intuition (Kant 2006, 227 ; Kant 1911, 1904/1911, A142-143/B182).

Ce retour de Richir vers Kant implique pourtant aussi un certain écart par rapport à ce dernier. Pour Richir, l'acte de compter n'est pas seulement la production du temps, car, pour que les nombres soient comptés, il faut que l'on garde en mémoire le nombre compté précédemment et le juxtaposer avec un autre nombre qui va être compté. Il s'agit de mettre ceux qui se succèdent (ceux qui sont temporels) en coexistence (dans leur spatialisation³).

Ainsi, nous avons vu que, aux yeux de Richir, ce que Frege décrit n'est autre que le schématisme transcendantal. Il nous reste à voir : comment Richir considère-t-il la critique faite par Husserl envers Kant dans la *Philosophie de l'arithmétique*, en soutenant que la constitution du nombre n'est pas influencée par l'ordre temporel ?

Bien que Richir n'évoque pas ce problème, nous pouvons le résoudre ainsi : Kant distingue la « *série du temps* » comme schéma transcendantal de la quantité (unité, pluralité, totalité), et l'« *ordre du temps* » comme schéma transcendantal de la relation (inhérence et subsistance, causalité et dépendance, communauté) (Kant 2006, 163, 229 ; Kant 1904, A80/B106, A145/B184 *et seq.*). Les catégories de la quantité n'obtiennent une concrétude pour la sensibilité que par la procédure de l'addition sous la forme de la série du temps, à savoir la suite du temps. Les catégories de la relation n'obtiennent une concrétude pour la sensibilité que par l'ordre du temps : persistance temporelle, succession temporelle, simultanéité temporelle (Kant 2006, 228-229 ; Kant 1911, 1904/1911, A144-145/B183-184). Le nombre en tant que suite du temps est donc indépendant de l'ordre du temps.

Conclusion

La mathématique d'aujourd'hui, en acceptant l'impossibilité de la preuve de l'existence de l'infini, pose cette existence comme axiome. Si nous partons de cet axiome, nous pourrions légitimement poser comme acquis la possibilité de la détermination complète des éléments de l'ensemble infini. Ainsi, cet axiome étant accepté, nous sommes libérés de la tâche de fonder l'arithmétique, en même temps que se légitime la définition fregéenne de la suite de l'hérédité.

Néanmoins, la phénoménologie ne peut pas poser sans examen critique ce qui n'est pas fondu dans le vécu de la subjectivité. La problématique husserlienne de la *Fundierung* (fondement), déployée dans la *Crise*, montre bien que l'*Idealisierung* (idéalisation) accompagnée de l'oubli du fondement (*Fundierung*) dans l'intuition sensible, peut provoquer la *Versponnenheit* (superficialité) de la science (Husserl 1954, 347). Tenir pour superflue la tâche du fondement est synonyme d'accepter l'impossibilité de la réactivation de ce qui avait été oublié.

Richir reprend cette tâche non seulement en retournant au schématisme transcendantal kantien, mais aussi en discernant celui-ci dans la définition logiciste fregéenne de la suite naturelle des nombres. Il s'agit du « schématisme de l'idéalité » qui rend possible « la construction du concept dans l'intuition pure » (Richir, Carlson 2015, 90).

La contribution de Frege, de ce point de vue phénoménologique, consiste à avoir rendu clair les deux caractéristiques de la suite des nombres : d'une part, « à tout nombre donné de la suite il y a un successeur », et d'autre part, « la suite est infinie » (Richir, Carlson 2015, 89). À Richir d'ajouter : cette suite reste toujours un infini potentiel.

NOTES

¹ Kant distingue, à l'intérieur du *quantum* au sens large, *quantum* au sens étroit (grandeur extensive) et *quantitas*. Le premier, étant spatialisé comme image à travers son schème, sera appliqué à l'objet de l'intuition dont la forme est l'espace. Le deuxième, étant temporalisé à travers son schème qui est le nombre, sera appliqué à l'objet de l'intuition dont la forme est le temps : « L'image pure qui présente toutes les grandeurs (*quantorum*) au sens externe est l'espace, tandis que celle de tous les objets des sens en général est le temps. Mais le schème pur de la grandeur (*quantitatis*), envisagée comme concept de l'entendement, est le nombre [...] » (Kant 2006, 227 ; Kant 1911, 1904/1911, A142/B182).

² Nous pouvons considérer, du point de vue de Frege, que la possibilité de la détermination complète des éléments de l'ensemble infini sera assurée par la pensée, et non par l'intuition. En ce sens, la position de Frege a aussi sa propre cohérence.

³ C'est Bergson qui nous donne de la matière à penser sur ce point : « [L]orsqu'on ajoute à l'instant actuel ceux qui le précédaient, comme il arrive quand on additionne des unités, ce n'est pas sur ces instants eux-mêmes qu'on opère,

puisqu'ils sont à jamais évanouis, mais bien sur la trace durable qu'ils nous paraissent avoir laissée dans l'espace en le traversant » (Bergson, 2007, 59).

RÉFÉRENCES

Leibniz, Gottfried Wilhelm. 2002. *Monadologie und andere metaphysische Schriften*. Hrsg. von Ulrich Johannes Schneider. Hamburg: Meiner.

Kant, Immanuel. 1900. [Akademie Ausgabe]. *Gesammelte Schriften*. Bde. I-XXIII. Hrsg. von Preussischen Akademie der Wissenschaften. Berlin: Reimer. [Abréviation : AA].

_____. 1911. [AA, A] „Kritik der reinen Vernunft (1. Aufl. 1781)“. In *Akademie Ausgabe*, Bd. IV, Hrsg. von Benno Erdmann. Berlin: G. Reimer [Abréviation : A].

_____. 1911. [AA IV Prol.]. „Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können“ (1783). In *Akademie Ausgabe*, Bd. IV, Hrsg. von Benno Erdmann. Berlin : G. Reimer. [Abréviation : Prol.]

_____. 1904/1911. [AA, B]. “Kritik der reinen Vernunft (2. Aufl. 1787)“. In *Akademie Ausgabe* Bd. III, Hrsg. von Benno Erdmann. Berlin : G. Reimer. [Abréviation : B].

_____. 2006. Kant, Immanuel. *Critique de la raison pure*. Traduit par Alain Renaut, Paris : GF-Flammarion. (Pour les citations, nous utilisons la traduction française).

Lange, Friedrich Albert. 1894. (Erstdruck 1877). *Logische Studien*. Leipzig: Baedeker.

Frege, Gottlob. 1993. *Begriffsschrift und andere Aufsätze, Zweite Auflage, Mit E. Husserls und H. Scholz' Anmerkungen*. Hrsg. von Ignacio Angelelli. Hildesheim/Zürich/New York: Olms.

_____. 1884. *Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: Verlag von Wilhelm Koebner.

Frege, Gottlob. Imbert, Claude (tr.). 1969. *Les fondements de l'arithmétique. Recherche logico-mathématique sur le concept de nombre*. Paris : Seuil. (Pour les citations, nous utilisons la traduction française).

Husserl, Edmund. 1954. *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendente Phänomenologie*. Hrsg. von Walter Biemel. Den Haag: Martinus Nijhoff.

_____. 1970. *Philosophie der Arithmetik. Mit ergänzenden Texten (1890-1901)*. *Husserliana Bd. XII*. Hrsg. von Eley, Lothar. Den Haag: Nijhoff.

Bergson, Henri. 2007 [1889]. *Essai sur les données immédiates de la conscience*. Edité par Arnaud Boaniche. Paris : P.U.F. [« Quadrige »].

Derrida, Jacques. 1990. *Le problème de la genèse dans la philosophie de Husserl [1953-1954]*. Paris : P.U.F.

Richir, Marc. 1983. « L'Hérédité et les nombres ». *La liberté de l'Esprit* n° 4 (*Qu'est-ce qu'un père ?*) : 77-137. Paris : Balland.

_____. 2004. *Phantasia, imagination, affectivité*. Grenoble : Millon.

Richir, Marc. Sacha, Carlson. 2015. *L'écart et le rien – Conversations avec Sacha Carlson*, Grenoble : Millon.

Masumi Nagasaka is currently working on French contemporary philosophy as a critical but also faithful development of German transcendental philosophy and phenomenology. Her 2013 doctoral thesis is entitled “*La foi dans la méfiance – « la possibilité de l'impossibilité » chez Derrida, à travers sa lecture de Husserl, Heidegger et Levinas*” (“Faith in mistrust—Derrida’s ‘possibility of the impossibility’ in his reading of Husserl, Heidegger and Levinas”).

Address:

Masumi Nagasaka
Associate Professor (Western Philosophy)
School of International Liberal Studies, Waseda University
1-6-1, Nishi-waseda, Shinjuku-ku
169-8050 Tokyo, Japan
E-mail: masumi.nagasaka@waseda.jp